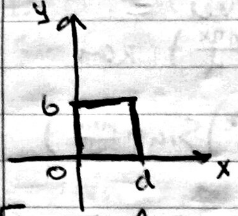
20-1-16

Για εξετάσεις: (όχι §1.7)(όχι: Rankine-Hugoniot)
μέθοδος χαρακτ, ασθενείς λύσεις(ή μεταβλητές ή γενικευμένες),
κυματική εξίσωση στην ευθεία(ομογενής και μη), ΠΑΤ,
τρίγωνο εξάρτησης, μέθοδος ενέργειας, εξίσωση θερμότητας και κυματική σε πεπερασμένο διάστημα.(με μέθοδο χωρισμού μεταβλητών - σειρές Fourier)
Στη μέθοδο ενέργειας θα πέσει κάτι σίγουρα.
Σήμερα: Εξίσωση Laplace, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, σε ορθογώνιο και κυκλικό δίσκο.
(Γενικά να ξέρω να αναγνωρίζω μια ΜΔΕ)
(εξίσωση θερμότητας, Laplace, μέθοδος χαρακτηρ.
από μια υπολογιστική άσκηση σίγουρα)

§6 Εξίσωση Laplace

§6.1 Σε ορθογώνιο



$$(1)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & \text{στο } (0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=f(x), & \text{στο } [0,a] \\ u(x,b)=0 & \text{στο } [0,a] \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & \text{στο } [0,b] \end{cases}$$

[Αν λύσουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να λύσουμε και το πρόβλημα με μη ομογενείς συνθήκες (Dirichlet) σε κάθε πλευρά, ως $u_1+u_2+u_3+u_4$, όπου κάθε u_i θα έχει μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες μόνο σε μια πλευρά (και όλες αυτές θα φτιάχνουν το σύνορο)]

(2): (1) χωρίς την $u(x,0)=f(x)$ στο $[0,a]$, δηλαδή

Παραδοχή: $V(x,y)=X(x)Y(y) \xrightarrow{\text{Εξ. Laplace}} X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$

$\xrightarrow{XY\neq 0} \dfrac{X''}{X}=-\dfrac{Y''}{Y}=-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}.$

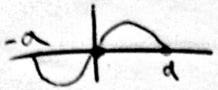
$\xrightarrow{Y\neq 0} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=X(a)=0 \xrightarrow[X\neq 0]{\text{Μέθοδος ενέργειας}}$
$\lambda=b^2,\ b>0$

$\Rightarrow X(x)=c\cos(bx)+D\sin(bx) \xrightarrow{X(0)=0} C=0 \xrightarrow{D\neq 0}$
$ba=n\pi,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2,\ X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{a}$

Επίσης, $Y''(y)=\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 Y(y),\ Y(b)=0 \Rightarrow$
$Y_n(y)=\sinh\dfrac{n\pi(b-y)}{a}$

$\Rightarrow V_n(x,y)=\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sinh\dfrac{n\pi(b-y)}{a},\ n\in\mathbb{N}$ (λύση του 2)

$\Rightarrow$ για το (1) έχουμε τις συνθήκες συμβατότητας
$u(0,0)=f(0)=u(a,0)=f(a)=0$



Απαίτηση: $f \in C([0,a])$, C^1 κατά τμήματα
$\Rightarrow f_{\text{επεκτ}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή, $2a$-περιοδική και
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a}$, $0 \le x \le a$,

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

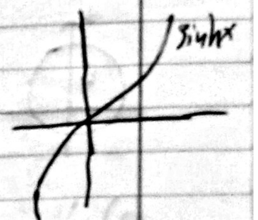
Πρόταση για λύση: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}$,
με $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} = f(x)$

$$\Rightarrow \tilde{a}_n = \frac{a_n}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$$

Δικαιολόγηση: Η προτεινόμενη u (λύση) είναι συνεχής αφού $f \in C([0,a])$, C^1 κατά τμήματα και
$\left|\frac{\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\right| \le 1$, $\forall y \in [0,b]$ $\Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση της u.

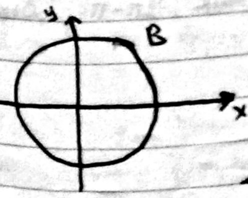
Να δειχθεί ότι $\left|\frac{\sinh x}{\sinh b}\right| \le 1$, $x \in [0,b]$

$$\frac{\sinh x}{\sinh b} = e^{x-b}\frac{1-e^{-2x}}{1-e^{-2b}}$$



Προκύπτει ότι u είναι $C^{\infty}((0,a)\times(0,b))$

§6.2 Τύπος του Poisson (Λύση της Laplace στο κυκλικό δίσκο)



$B = B((0,0),a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<a^2\}$, $a>0$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ u|_{\partial B} = h \end{cases}$$

Εκφράζουμε την εξίσωση Laplace σε πολικές συντ/νες

$$u(x,y) = u(\underbrace{p(r,\varphi)}_{=\binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}=\binom{x}{y}}) = \underbrace{(u\circ p)}_{=\tilde{u}}(r,\varphi)$$

$$D(u\circ p)(r,\varphi) = D\underbrace{u}_{\tilde{u}}(\underbrace{p(r,\varphi)}_{=(x,y)})\, Dp(r,\varphi)$$

$$\Rightarrow (Du)(x,y) = D(\underbrace{u\circ\varphi}_{\tilde{u}})(r,\varphi)\, Dp(r,\varphi)^{-1} \ (*),$$ όπου

$$Dp(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Dp(r,\varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s/r & c/r \end{pmatrix}$$

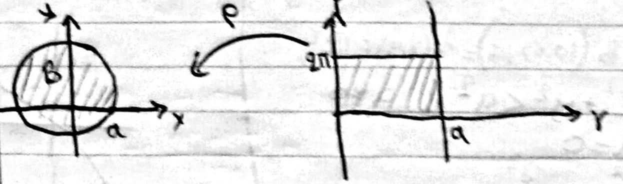
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_r c - \tilde{u}_\varphi \frac{s}{r} \\ \tilde{u}_r s + \tilde{u}_\varphi \frac{c}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_x\circ p)(r,\varphi) \\ (u_y\circ p)(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D\begin{pmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Du_x)(x,y) \\ (Du_y)(x,y) \end{pmatrix} \overset{(*)}{=\!=} D\begin{pmatrix} \tilde{u}_r c - \tilde{u}_\varphi \frac{s}{r} \\ \tilde{u}_r s + \tilde{u}_\varphi \frac{c}{r} \end{pmatrix} A$$

$$\Rightarrow \Delta u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y = \nabla_{(r,\varphi)}\left(\tilde{u}_r c - \tilde{u}_\varphi \frac{s}{r}\right)\cdot(c, -s/r)$$

$$+ \nabla\left(\tilde{u}_r s + \tilde{u}_\varphi \frac{c}{r}\right)\cdot(s, c/r) = \dots = \tilde{u}_{rr} + \tilde{u}_r \frac{1}{r} + \tilde{u}_{\varphi\varphi}\frac{1}{r^2} = 0$$

Δηλαδή, θέλουμε να λύσουμε την (1) $\begin{cases} u_{rr} + u_r \frac{1}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{1}{r^2} = 0, & 0<r<a \\ u(a,\varphi) = h(\varphi), & \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-περιοδική



(2) $V_{rr} + V_r \frac{1}{r} + V_{\varphi\varphi}\frac{1}{r^2} = 0, \quad 0<r<a, \quad \varphi\in\mathbb{R}$

Παραδοχή: $V(r,\varphi) = R(r)\,\phi(\varphi)$

$$\Rightarrow R''(r)\,\phi(\varphi) + R'(r)\frac{1}{r}\phi(\varphi) + R(r)\frac{1}{r^2}\phi''(\varphi) = 0$$

$$\xRightarrow[r\neq 0]{R\Phi\neq 0} r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\varphi''}{\varphi} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3\alpha)\ \varphi''(\varphi) + \lambda\varphi(\varphi) = 0, & \varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ (2\pi\text{-περιοδική}) \\ (3\beta)\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, & 0<r<a \end{cases}$$

$(3\alpha) \Rightarrow \int_0^{2\pi}(\varphi')^2 = \lambda\int_0^{2\pi}\varphi^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$

<u>Για $\lambda=0$</u>: $\varphi'(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi(\varphi) = 1$

$\lambda>0$: $\varphi(\varphi) = C\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + D\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) \xRightarrow{\varphi(0)=\varphi(2\pi)=\varphi(-2\pi)}$

$C = C\cos(\sqrt{\lambda}\,2\pi) + D\sin(\sqrt{\lambda}\,2\pi)$

$C = \text{———}'' \text{———} - D\sin(\sqrt{\lambda}\,2\pi)$

$\Rightarrow D\sin(\sqrt{\lambda}\,2\pi) = 0$ και $\cos(\sqrt{\lambda}\,2\pi) = 1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,2\pi = 2n\pi, n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \lambda = n^2, n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda_n = n^2,\quad \varphi_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi), n\in\mathbb{N}_0$.

(3β) για $\lambda=0$: $r^2R''(r) + rR'(r) = 0 \Rightarrow r(R')'(r) + R'(r) = 0$

$\Rightarrow R'(r) \equiv 0 \ \vee\ \frac{(R')'}{R'} = -\frac{1}{r} \Rightarrow$ $R(r) = \text{const}$ $\vee$

$\ln|R'| = -\ln r + c \Leftrightarrow |R'| = ce^{-\ln r} \Leftrightarrow R' = c\frac{1}{r} \Leftrightarrow R = C\ln r$

<u>απορ</u>, αφού $\lim_{r\to 0^+}\ln r = -\infty$

Άρα, για $\lambda_0=0$: $R_0(r) = 1$

(3β) με $\lambda=n^2$: $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$ $(**)$

Παραδοχή: $R(r) = e^{a\ln r} \Rightarrow R' = Ra\frac{1}{r} \Leftrightarrow rR' = aR$

$\Rightarrow R''(r) = R'(r)a\frac{1}{r} - R(r)\frac{a}{r^2} \Rightarrow r^2R'' = R(a^2-a)$

$\xRightarrow{(**)} R(a^2-a+a-\lambda) = 0 \xRightarrow{R\neq 0} a^2-\lambda = 0 \xLeftrightarrow{\lambda=n^2} a = \pm n$.

Άρα, $R(r) = r^n$ $\vee$ $R(r) = \frac{1}{r^n} \to$ απορ

$$\Rightarrow u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n}\left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right]$$

με $u(a,\varphi) = h(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)$, όπου $h \in C^1(\mathbb{R})$, 2π-περιοδική

$\Rightarrow$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi \Rightarrow u \in C^{\infty}(B)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\,dt$$

$$\Rightarrow u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} h(t)\Big(\underbrace{\cos(nt)\cos(n\varphi) + \sin(nt)\sin(n\varphi)}_{\cos(n(\varphi-t))}\Big)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\Big[\underbrace{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\varphi-t))}_{= \frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-t)+r^2}}\Big]dt$$

Δηλαδή, η λύση του (1) είναι

Τύπος Poisson
$$\boxed{u(x,y) = \tilde{u}(r,\varphi) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(t) = (\tilde{u}(a,t))\,\oplus}{a^2-2ar\cos(\varphi-t)+r^2}\,dt}$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$
Τύπος Euler

Επικαμπύλιο: $\int_{\partial B} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\underbrace{\gamma(t)}_{=(a\cos t,\, a\sin t)})\,\|\gamma'(t)\|\,dt = a\int_0^{2\pi} f(a\cos t, a\sin t)\,dt$

$\oplus = u(a\cos t, a\sin t)$

και $\|\underbrace{(x,y)}_{=(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)} - \underbrace{(\tilde{x},\tilde{y})}_{=(a\cos t,\, a\sin t)}\|^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos(\varphi - t)$

Απ' όλα αυτά έχω

$$u(x,y) = \frac{a^2-r^2}{2\pi a}\, a\int_0^{2\pi} \frac{u(a\cos t, a\sin t)}{\|(x,y) - (a\cos t, a\sin t)\|^2}\,dt$$

$$= \frac{a^2 - \|(x,y)\|^2}{2\pi a}\int_{\|(\tilde{x},\tilde{y})\|=a} \frac{u(\tilde{x},\tilde{y})}{\|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\|^2}\,ds \qquad \frac{\bar{x} = (x,y)}{\bar{y} = (\tilde{x},\tilde{y})}$$

$$= \frac{a^2 - \|\bar{x}\|^2}{2\pi a}\int_{\|\bar{y}\|=a} \frac{u(\bar{y})}{\|\bar{x}-\bar{y}\|^2}\,ds \Rightarrow$$

$$u(\bar{0}) = \frac{a^2}{2\pi a} \int_{\|\bar{y}\|=a} \frac{u(\bar{y})}{\|\bar{y}\|^2} ds = \frac{1}{2\pi a} \int_{\|\bar{y}\|=a} u(\bar{y})\, ds$$

$\Rightarrow$ ιδιότητα της μέσης τιμής: αν u αρμονική σ'ένα ανοιχτό δίσκο και συνεχής στον κλειστό, τότε η τιμή της στο κέντρο του δίσκου ισούται με τη μέση τιμή των τιμών της u στο σύνορο

Ισχυρή αρχή του μεγίστου

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο και $u \in C(\bar{D})$ και αρμονική στο D. Τότε αν η u λαμβάνει το μέγιστο στο D, τότε η u είναι σταθερή

Απόδειξη

Έστω $\bar{x}_M \in D$ το σημείο μεγίστου της $u: \bar{D} \to \mathbb{R}$, τότε έχουμε $u(\bar{x}_M) = M$ (μέγιστο της u). Έστω τώρα B ένας κύκλος με κέντρο $\bar{x}_M$ και ακτίνα a

$\Rightarrow u(\bar{x}) = M, \ \forall \bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_M, a)$ [ιδιότητα της μέσης τιμής: αν $u(\bar{x}) < M$] $\Rightarrow \bar{u}$